# Devoir sur Table 1

## Durée : 4h

- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

---

## Exercice 1

*(Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes 2009)*

### *Partie I — Étude de deux applications*

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\varphi$ est linéaire.
3. Écrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application $f$ est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$ ?
6. L'application $\varphi$ est-elle injective ? surjective ?

### *Partie II — Calcul des puissances successives d'une matrice*

On note $I_3$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Écrire la matrice de passage $Q$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
9. Justifier que $Q$ est inversible et calculer son inverse.
10. Écrire la matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
11. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neufs coefficients de $A^n$.
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de $a$, $b$, $c$.
13. En déduire que
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

---

## Exercice 2

*(Oral Banque PT)*

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ et de six boules numérotées de 1 à 6.

Au début de l'expérience, il y a deux boules dans $U_1$ et quatre dans $U_2$.

On dispose également d'un dé équilibré à six faces. À chaque étape on va lancer le dé puis on change d'urne la boule portant le même chiffre que le dé.

Soit $X_n$ la variable aléatoire qui représente le nombre de boules dans $U_1$ après le lancer $n$.

1. Donner la loi de $X_1$ ainsi que son espérance.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 6)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 5)$.
4. Soit $k \in [\![1, 5]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de la loi de $X_n$.
5. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)$.
6. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de $n$ et la limite quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

## Exercice 3

*(Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes 2009)*

On rappelle que l'on définit les fonction sinus hyperbolique sh, cosinus hyperbolique ch et tangente hyperbolique th par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

### *Partie I — Étude d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de $f$.
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de $f$ en 0.

3. Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = \left(\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \times \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$
4. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{th}(y) < y$.
5. En déduire le tableau de variations de $f$.
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{sh}(x)}{x}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $f$ admet un développement de la forme
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$
où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.
8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée $F$, puis prouver que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

## *Partie II — Une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle $(E)$ suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \text{ch}(x). \qquad (E)$$

9. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E)$.
10. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle $(E)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
11. Justifier que la fonction $F$ (définie dans la question 8) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

## *Partie III — Étude d'une suite*

12. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation
$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$
admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note $u_n$.

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
14. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
15. En utilisant la question 7, déterminer un équivalent de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## *Partie IV — Une fonction définie par une intégrale*

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\,\text{d}t$.

16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(2x) = 2\,\text{ch}(x)\,\text{sh}(x)$.
17. Justifier que $J$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\,\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$
18. En déduire le signe de $J'$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ; on exprimera le (ou les) zéro(s) de $J'$ à l'aide de la fonction ln.
19. *On admet les résultats suivants :*
*(*)* $\lim\limits_{x\to 0^+} J(x) = +\infty$,
*(*)* $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = +\infty$ *et* $J$ *admet au voisinage de* $+\infty$ *une asymptote d'équation* $y = \dfrac{x}{2}$,
*(*) la courbe représentative de* $J$ *est toujours « au dessus »de l'asymptote précédente.*
Donner le tableau de variations de $J$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
20. Tracer l'allure de la courbe représentative de $J$.
*On donne pour le tracé :* $\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0,76$ *et* $J\left(\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ *à* $10^{-2}$ *près.*